This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

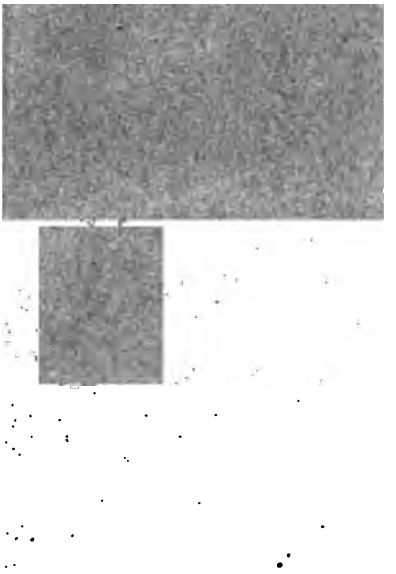
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06641467 7

NEW YORK PUBLIC LIBRARY



MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DE LA LUMIÈRE,

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

A PARIS,
CHEZ DE BURE FRÈRES,
LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI,
RUE SERPENTE, N. 7.

1830.

PEAI
6 3 E

IMPRIMERIE DE RETHUNE,
RUE PALATINE, N° 5.

MEMOIRE

SUR

LA THÉORIE DE LA LUMIÈRE.

PREMIÈRE PARTIE.

J'ai donné le premier, dans les exercices de mathématiques (troisième et quatrième volume), les équations générales d'équilibre ou de mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, en admettant que ces forces fussent représentées par des fonctions des distances entre les molécules; et j'ai prouvé que ces équations, qui renferment un grand nombre de coefficients dépendants de la nature du système, se réduisaient, dans le cas où l'élasticité redevenait la même en tous sens, à d'autres formules qui ne renferment qu'un seul coefficient, et qui avaient été primitivement obtenues par M. Navier. J'ai de plus déduit de ces équations celles qui déterminent les mouvements des plaques et des verges élastiques, quand on suppose que l'élasticité n'est pas la même en tous sens; et j'ai ainsi obtenu des formules qui comprennent, comme cas particuliers, celles que M. Poisson et d'autres géomètres avaient trouvées dans la supposition contraire. L'accord remarquable de ces

diverses formules, et des lois qui s'en déduisent, avec les observations des physiciens, et spécialement avec les belles expériences de M. Savart, devait m'encourager à suivre les conseils de quelques personnes qui m'engageaient à faire des équations générales que j'avais données une application nouvelle à la théorie de la lumière. Ayant suivi ce conseil, j'ai été assez heureux pour arriver aux résultats que je vais exposer dans ce mémoire, et qui me paraissent dignes de fixer un moment l'attention des physiciens et des géomètres.

Les trois équations aux différences partielles qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, renferment, avec le temps t, et les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de l'espace, les déplacements ξ, η, ζ de la molécule m qui coïncide, au bout du temps t, avec le point dont il s'agit; ces déplacements étant mesurés parallèlement aux axes des x, y, z. Les mêmes équations offriront vingt et un coefficients dépendants de la nature du système, si l'on fait abstraction des coefficients qui s'évanouissent, lorsque les masses m, m', m'', des diverses molécules sont deux à deux égales entre elles et distribuées symétriquement de part et d'autre de la molécule m sur des droites menées par le point avec lequel cette molécule coïncide. Enfin ces équations seront du second ordre, c'est-à-dire qu'elles ne contiendront que des dérivées du second ordre des variables principales ξ, η, ζ, et l'on pourra, en considérant chaque coefficient comme une quantité constante, ramener leur intégration à celle d'une équation du sixième ordre qui ne renfermera plus qu'une seule variable principale. Or cette dernière pourra être facilement intégrée à l'aide des

méthodes générales que j'ai données dans le 19ᵉ cahier du journal de l'École Polytechnique, et dans le mémoire sur l'application du calcul des résidus aux questions de physique mathématique. En appliquant ces méthodes au cas où l'élasticité du système reste la même en tous sens, et réduisant la valeur de la variable principale à la forme la plus simple, à l'aide d'un théorème établi depuis long-temps par M. Poisson, on obtient précisément les intégrales qu'a données ce géomètre dans les mémoires de l'Académie. Mais dans le cas général, la variable principale étant représentée par une intégrale définie sextuple, il fallait, pour découvrir les lois des phénomènes, réduire cette intégrale sextuple à une intégrale d'un ordre moins élevé. Cette réduction m'a long-temps arrêté: mais je suis enfin parvenu à l'effectuer, pour l'équation aux différences partielles ci-dessus mentionnée, et même généralement pour toutes les équations aux différences partielles dans lesquelles les diverses dérivées de la variable principale, prises par rapport aux variables indépendantes x, y, z, t, sont des dérivées de même ordre. Alors j'ai obtenu, pour représenter la variable principale, une intégrale définie quadruple, et j'ai pu rechercher les lois des phénomènes dont la connaissance devait résulter de l'intégration des équations proposées. Cette recherche a été l'objet du dernier mémoire que j'ai eu l'honneur d'offrir à l'Académie, et qui renferme entre autres la proposition suivante.

Étant donnée une équation aux différences partielles dans laquelle toutes les dérivées de la variable principale relatives aux variables indépendantes x, y, z, t, sont de même ordre, si les valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivées prises par rapport au temps sont

sensiblement nulles dans tous les points situés à une distance finie de l'origine des coordonnées, cette variable et ses dérivées n'auront plus de valeurs sensibles au bout du temps t, dans l'intérieur d'une certaine surface, et par conséquent les vibrations sonores, lumineuses, etc. qui peuvent être déterminées à l'aide de l'équation aux différences partielles, se propageront dans l'espace de manière à produire une onde sonore, lumineuse, etc..... dont la surface sera précisément celle que nous venons d'indiquer. De plus on obtiendra facilement l'équation de la surface de l'onde, en suivant la règle que je vais tracer.

Concevons que, dans l'équation aux différences partielles, on remplace une dérivée quelconque de la variable principale prise par rapport aux variables indépendantes x, y, z, t, par le produit de ces variables élevées à des puissances dont les degrés soient marqués, pour chaque variable indépendante, par le nombre des différenciations qui lui sont relatives. La nouvelle équation que l'on obtiendra sera de la forme

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

et représentera une certaine surface courbe. Considérez maintenant le rayon vecteur mené de l'origine à un point quelconque de cette surface courbe; portez sur ce rayon vecteur, à partir de l'origine, une longueur égale au carré du temps divisé par ce même rayon; menez ensuite par l'extrémité de cette longueur un plan perpendiculaire à sa direction. Ce plan sera le plan tangent à la surface de l'onde, et par conséquent cette surface sera l'enveloppe de l'espace que traverseront les divers plans qu'on peut construire en opérant comme on vient de le dire. Au reste, on arrive encore aux mêmes conclusions, en suivant

une autre méthode que je vais exposer en peu de mots, et que j'ai développée dans mes dernières leçons au collége de France.

Supposons que les valeurs initiales de la variable principale et de ses dérivées prises par rapport au temps ne soient sensibles que pour les points situés à des distances très-petites d'un certain plan mené par l'origine des coordonnées, et dépendent uniquement de ces distances. Cette même variable et ces dérivées ne seront sensibles, au bout du temps t, que dans le voisinage de l'un des plans parallèles, construits à l'aide de la règle que nous avons précédemment indiquée. Par conséquent, si les vibrations sonores, lumineuses, etc., sont primitivement renfermées dans une onde plane, cette onde, que nous nommerons élémentaire, se divisera en plusieurs autres dont chacune se propagera dans l'espace, en restant parallèle à elle-même, avec une vitesse constante. Mais ces diverses ondes auront des vitesses de propagation différentes. Si maintenant on conçoit qu'au premier instant plusieurs ondes élémentaires soient renfermées dans des plans divers menés par l'origine des coordonnées, mais peu inclinés les uns sur les autres, et que les vibrations sonores, lumineuses, etc., soient assez petites pour rester insensibles dans chaque onde élémentaire prise séparément; alors, ces vibrations ne pouvant devenir sensibles que par la superposition d'un grand nombre d'ondes élémentaires, il est clair que les phénomènes relatifs à la propagation du son, de la lumière, etc. ne pourront être observés, au premier moment, que dans une très-petite étendue autour de l'origine des coordonnées, et au bout du temps t, que dans le voisinage des diverses nappes de la surface qui sera touchée par toutes les ondes élé-

mentaires. Or cette dernière surface sera précisément la surface courbe dont nous avons parlé ci-dessus, et que l'on nomme généralement surface de l'onde.

Cela posé, si l'on considère le mouvement de propagation des ondes planes, dans un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, on pourra prendre successivement pour variables principales trois déplacements rectangulaires d'une molécule m mesurés parallèlement aux trois axes d'un certain ellipsoïde qui aura pour centre l'origine des coordonnées, et que l'on construira facilement dès que l'on connaîtra les coefficients dépendants de la nature du système proposé, et la direction du plan ABC, qui renfermait une onde plane au premier instant. Alors cette onde se divisera en six autres qui auront constamment la même épaisseur que la première, et se propageront avec des vitesses constantes, dans des plans parallèles à ABC. Ces ondes, prises deux à deux, auront des vitesses de propagation égales mais dirigées en sens contraires. De plus ces vitesses, mesurées suivant une droite perpendiculaire au plan ABC, pour les trois ondes qui se mouvront dans un même sens, seront constantes et respectivement égales aux quotients qu'on obtient en divisant l'unité par les trois demi-axes de l'ellipsoïde ci-dessus mentionné. Les points situés hors de ces ondes seront en repos, et si les trois demi-axes de l'ellipsoïde sont inégaux, le déplacement absolu et la vitesse absolue des molécules, dans une onde plane, resteront toujours parallèles à celui des trois axes de l'ellipsoïde qui sera réciproquement proportionnel à la vitesse de propagation de cette onde. Mais, si deux ou trois axes de l'ellipsoïde deviennent égaux, les ondes planes qui se propageront dans le même

sens avec des vitesses réciproquement proportionnelles à ces axes, coïncideront, et la vitesse absolue de chaque molécule renfermée dans une onde plane sera, au bout d'un temps quelconque, parallèle aux droites suivant lesquelles les vitesses initiales se projetaient sur le plan mené par les deux axes égaux de l'ellipsoïde, ou même, si l'ellipsoïde se change en une sphère, aux directions de ces vitesses initiales.

Concevons maintenant qu'au premier instant plusieurs ondes planes, peu inclinées les unes sur les autres et sur un certain plan ABC, se rencontrent et se superposent en un certain point A. Le temps venant à croître, chacune de ces ondes se propagera dans l'espace, en donnant naissance, de chaque côté du plan qui la renfermait primitivement, à trois ondes semblables renfermées dans des plans parallèles, mais douées de vitesses de propagation différentes; par conséquent le système d'ondes planes que l'on considérait d'abord se subdivisera en trois autres systèmes, et le point de rencontre des ondes qui feront partie d'un même système se déplacera suivant une certaine droite avec une vitesse de propagation distincte de celle des ondes planes. Donc, au bout d'un temps quelconque t, le point A se trouvera remplacé par trois autres points dont les positions dans l'espace pourront être calculées pour une direction donnée du plan ABC, et les diverses positions que pourront prendre les trois points dont il s'agit pour diverses directions primitivement attribuées au plan ABC, détermineront une surface courbe à trois nappes, dans laquelle chaque nappe sera constamment touchée par les ondes planes qui feront partie d'un même système. Or cette surface courbe sera précisément celle dont nous avons déjà parlé

ci-dessus, et que nous avons nommée surface de l'onde.

La raison pour que la propagation des ondes planes puisse s'effectuer dans un corps cristallisé, il est nécessaire que les coefficients, ou au moins certaines fonctions des coefficients entrent dans les équations aux différences partielles qui représentent le mouvement du corps élastique, résolues primitives. Dans le cas contraire, les ondes planes ne pourraient plus se propager, et l'on en serait averti par le calcul qui donnerait pour les vitesses de propagation des valeurs imaginaires.

Dans la théorie de la lumière, on désigne sous le nom d'éther le fluide impondérable que l'on considère comme étant le milieu élastique dans lequel se propagent les ondes lumineuses. Le point de rencontre d'un grand nombre d'ondes planes dont les plans sont peu inclinés les uns aux autres est celui dans lequel on suppose que la lumière peut être perçue par l'œil. La série des positions que ce point de rencontre prend dans l'espace, tandis que les ondes se déplacent, constitue ce qu'on nomme un rayon lumineux; et la vitesse de la lumière mesurée dans le sens de ce rayon doit être soigneusement distinguée, 1° de la vitesse de propagation des ondes planes, 2° de la vitesse propre des molécules éthérées. Enfin l'on appelle rayons polarisés ceux qui correspondent à des ondes planes dans lesquelles les vibrations des molécules restent constamment parallèles à une droite donnée, quelles que soient les directions des vibrations initiales.

Pour plus de généralité, nous dirons que, dans un rayon lumineux, la lumière est polarisée parallèlement à une droite ou à un plan donné, lorsque les vibrations des molécules lumineuses seront parallèles à cette droite ou à ce plan, sans être parallèles dans tous les cas aux direc-

tions des vibrations initiales; et nous appellerons plan de polarisation le plan qui renfermera la direction du rayon lumineux, et celle de vitesses propres de molécules éthérées. Ces définitions s'accordent, comme on le verra plus tard, avec les dénominations reçues.

Cela posé, il résulte des principes ci-dessus établis, qu'en partant d'un point donné de l'espace, un rayon de lumière dans lequel les vitesses propres des molécules ont des directions quelconques, se subdivisera généralement en trois rayons de lumière polarisée parallèlement aux trois axes d'un certain ellipsoïde. Mais chacun de ces rayons polarisés ne pourra plus être divisé par l'action du fluide élastique dans lequel la lumière se propage. De plus le mode de polarisation dépendra de la constitution de ce fluide, c'est-à-dire, de la distribution de ses molécules dans l'espace ou dans un corps transparent, et du plan qui renfermait primitivement les molécules vibrantes. Si la constitution du fluide élastique est telle que les vitesses de propagation des ondes planes deviennent imaginaires, cette propagation ne pourra plus s'effectuer, et le corps dans lequel le fluide éthéré se trouve compris deviendra ce qu'on nomme un corps opaque. Si le corps reste transparent, et si dans ce corps le fluide éthéré se trouve distribué de telle sorte que son élasticité demeure la même en tous sens autour d'un point quelconque, les trois rayons polarisés, dans lesquels se subdivise généralement un rayon quelconque de lumière, seront dirigés suivant la même droite; et, comme la vitesse de la lumière sera la même dans les deux premiers rayons, ceux ci se confondront l'un avec l'autre. Il ne restera donc alors que deux rayons polarisés, l'un double, l'autre simple, ayant la même direction. Or, le calcul fait voir que

dans le rayon simple la lumière sera polarisée suivant la direction dont il s'agit, tandis que dans le rayon double la lumière sera polarisée perpendiculairement à cette direction. Si les vibrations initiales des molécules lumineuses sont renfermées dans un plan perpendiculaire à la direction dont il s'agit, le rayon simple disparaîtra, et les vitesses propres des molécules dans le rayon double resteront constamment dirigées suivant des droites parallèles aux directions des vitesses initiales, de sorte qu'à proprement parler, il n'y aura plus de polarisation. Alors aussi la vitesse de propagation de la lumière sera équivalente à la vitesse de propagation d'une onde plane, et la même en tous sens autour de chaque point. Or, la réduction de tous les rayons à un seul, et l'absence de toute polarisation dans les milieux où la lumière se propage en tous sens avec la même vitesse étant des faits constatés par l'expérience, nous devons conclure de ce qui précède que dans ces milieux les vitesses propres des molécules éthérées sont perpendiculaires aux directions des rayons lumineux, et comprises dans les ondes planes. Ainsi l'hypothèse admise par Fresnel devient une réalité. Cet habile physicien, malheureusement enlevé aux sciences par une mort prématurée, a donc eu raison de dire que dans la lumière ordinaire les vibrations sont transversales, c'est-à-dire perpendiculaires aux directions des rayons. A la vérité, les idées de Fresnel sur cet objet ont été vivement combattues par un illustre académicien dans plusieurs articles que renferment les *Annales de physique et de chimie*, et dont l'un est relatif au mouvement de deux fluides superposés. Suivant l'auteur de ces articles, les vibrations des molécules dans l'éther finiraient par être toujours sensiblement perpendiculaires aux surfaces des

ondes que le mouvement produit en se propageant, et dès-lors la polarisation, telle qu'elle a été précédemment définie, deviendrait impossible et disparaîtrait complètement. Alors aussi la surface de l'onde serait toujours un ellipsoïde, et n'offrirait qu'une seule nappe, en sorte que pour expliquer la double réfraction on serait obligé de supposer deux fluides éthérés simultanément renfermés dans le même milieu. Mais on doit remarquer que l'auteur, comme il le dit lui-même, avait déduit ces diverses conséquences de l'intégration de l'équation connue aux différences partielles qui représente les mouvements des fluides élastiques, et de celle qu'on en déduit lorsqu'on suppose inégaux les trois coefficients des dérivées partielles de la variable principale. Or, ces équations ne paraissent point applicables à la propagation des ondes lumineuses dans un fluide éthéré, et l'accord remarquable de la théorie que je propose avec l'expérience me semble devoir confirmer l'assertion que j'ai déjà émise dans un précédent mémoire sur le mouvement de la lumière; savoir, que les équations différentielles de ce mouvement sont comprises dans celles que renferment les 31 et 32^{e} livraisons des *Exercices de mathématiques*.

Dans la seconde partie de ce mémoire que je me propose de lire à la séance prochaine, j'appliquerai les principes que je viens d'établir à la détermination des lois suivant lesquelles la lumière se propage dans les cristaux à un seul axe ou à deux axes optiques, et je montrerai comment on peut déduire de mes formules des règles propres à faire connaître les vitesses de propagation des ondes élémentaires, et les plans de polarisation des rayons lumineux. Lorsqu'on s'arrête à un premier degré d'approximation, ces règles s'accordent d'une manière digne de remarque avec celles

que plusieurs savants ont déduites de l'expérience ou de l'hypothèse des ondulations, et en particulier avec celles que Fresnel a données dans son beau mémoire sur la double réfraction. Seulement il s'est trompé en admettant que les vibrations des molécules éthérées dans un rayon lumineux étaient sensiblement perpendiculaires au plan généralement nommé plan de polarisation. Dans la réalité, le plan de polarisation renferme la direction du rayon et celle des vibrations de l'éther. Un jeune géomètre, M. Blanchet, avait, de son côté, et même avant moi, déduit cette conséquence et les lois de la polarisation pour les cristaux à un seul axe optique des premières formules que j'avais données. Mais la nouvelle analyse dont j'ai fait usage ne laisse rien à désirer à cet égard, et s'étend à tous les cas possibles.

Je ferai voir encore dans la seconde partie du mémoire que la pression est nulle dans le fluide éthéré qui propage les vibrations lumineuses; et je montrerai les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients renfermés dans les équations différentielles du mouvement des corps élastiques, pour que la surface de l'onde lumineuse acquière la forme indiquée par l'expérience. Enfin dans une troisième partie je dirai comment on peut établir les lois de la réflexion et de la réfraction à la première ou à la seconde surface d'un corps transparent, et déterminer la proportion de lumière réfléchie ou réfractée. Ici encore la théorie s'accorde parfaitement avec l'observation, et l'analyse me ramène aux lois que plusieurs physiciens ont déduites de l'expérience. Ainsi en particulier, le calcul me fournit la loi de M. Brewster sur l'angle de la polarisation complète par réflexion, et la loi de M. Arago sur la quantité de lumière réfléchie à la première ou à la seconde sur-

face d'un milieu transparent. J'obtiens aussi les formules que Fresnel a insérées dans le 17e numéro des *Annales de physique et de chimie*, et qui suffiraient à elles seules pour constater la sagacité vraiment extraordinaire de cet illustre physicien.

Enfin j'indiquerai les moyens à l'aide desquels les physiciens pourront constater la réalité de la triple réfraction, ou, ce qui revient au même, l'existence du troisième rayon polarisé, traversant un milieu dont l'élasticité n'est pas la même dans tous les sens.

DEUXIÈME PARTIE.

14 juin. Ainsi qu'on l'a vu dans la première partie de ce mémoire, l'intégration des équations aux différences partielles que j'ai données dans les exercices, comme propres à représenter le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, conduit directement à l'explication des divers phénomènes que présente la théorie de la lumière. Il y a plus: pour établir cette théorie, il n'est pas nécessaire de recourir aux intégrales générales des équations dont il s'agit. Il suffit de discuter les intégrales particulières qui expriment le mouvement de propagation d'une onde plane dans un milieu élastique. En effet, la sensation de lumière étant supposée produite par les vibrations des molécules d'un fluide éthéré, pour déterminer la direction et les lois suivant lesquelles de semblables vibrations, d'abord circonscrites dans des limites très-resserrées, autour d'un certain point O, se propageraient à travers ce fluide, il suffit de considérer au premier instant un grand nombre d'ondes planes qui se superposent dans le voisinage du point O, et d'admettre que, les plans de ces ondes étant peu inclinés les uns sur les autres, les vibrations des molécules sont assez petites pour rester insensibles dans

chaque onde prise séparément, mais deviennent sensibles par la superposition indiquée. Or, le calcul nous a fait voir que dans un fluide éthéré, dont l'élasticité n'est pas la même en tous sens, chaque onde plane se subdivise généralement en trois autres de même épaisseur, comprises dans des plans parallèles, mais propagées avec des vitesses différentes, de chaque côté du plan qui renfermait l'onde initiale. Nous en avons conclu qu'un système d'ondes planes superposées d'abord dans le voisinage d'un point donné O, se subdivise en trois systèmes d'ondes qui viennent successivement se superposer en différents points de l'espace, et nous avons nommé rayon lumineux la droite qui renferme, pour l'un des systèmes, tous les points de superposition. Nous avons ainsi montré que trois rayons lumineux résultent généralement de vibrations moléculaires qui ne s'étendaient d'abord qu'à une très petite distance autour du point O. Nous avons d'ailleurs reconnu que, dans chacun de ces rayons lumineux, les vibrations des molécules éthérées demeuraient constamment parallèles à l'un des trois axes d'un certain ellipsoïde, et qu'en conséquence dans les trois rayons la lumière était polarisée suivant trois directions perpendiculaires l'une à l'autre, et parallèles aux trois axes de l'ellipsoïde, quelles que fussent, d'ailleurs, les directions des vibrations initiales. Nous avons vu les trois rayons se réduire à deux, ou même à un seul, lorsque les vibrations initiales étaient parallèles à l'un des plans principaux de l'ellipsoïde ou à l'un de ses axes, et dès lors il a été facile de comprendre pourquoi les rayons polarisés ne se subdivisent pas à l'infini. Nous avons prouvé que dans le cas où l'élasticité de l'éther est la même en tous sens, les trois rayons se réduisaient à deux; savoir, un

rayon simple et un rayon double, dirigés suivant la même droite, et polarisés, le premier parallèlement, le second perpendiculairement à cette droite. Enfin nous avons vu le rayon simple disparaître, lorsque les vibrations initiales des molécules de l'éther étaient supposées perpendiculaires aux directions des rayons, et alors il n'y avait plus, à proprement parler, de polarisation. Or, la réduction de tous les rayons à un seul, et l'absence de toute polarisation dans les milieux où la lumière reste la même en tous sens, étant constatées par l'expérience, nous avons tiré de notre analyse cette conclusion définitive que, dans la lumière ordinaire, les vibrations sont transversales, c'est-à-dire perpendiculaires aux directions des rayons; et ainsi l'hypothèse que Fresnel avait admise, malgré les arguments et les calculs d'un illustre adversaire, s'est transformée en une réalité.

Nous allons maintenant appliquer la théorie que nous venons de reproduire en peu de mots à la propagation de la lumière dans les cristaux à un axe ou à deux axes optiques. Pour y parvenir, il ne sera pas nécessaire d'employer les équations générales que nous avons données dans la 31ᵉ livraison des *Exercices* comme propres à représententer le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, et l'on pourra réduire ces équations aux formules (68) de la page 208 du troisième volume, c'est-à-dire, aux formules qui expriment le mouvement d'un système qui offre trois axes d'élasticité perpendiculaires entre eux. On pourra d'ailleurs supposer qu'aucune force intérieure n'est appliquée au système, et alors les formules dont il s'agit renfermeront seulement le temps t, les coordonnées x, y, z d'une molécule quelconque m, ses dé-

placements ξ, η, ζ, mesurés parallèlement aux axes coordonnés, et neuf coefficients $G, H, I, L, M, N, P, Q, R$, dont les trois premiers seront proportionnels aux pressions supportées, dans l'état naturel du fluide éthéré, par trois plans respectivement perpendiculaires à ces mêmes axes. Les coefficients dont il est ici question, étant regardés comme constants, on construira sans peine l'ellipsoïde dont les trois axes sont réciproquement proportionnels aux trois vitesses de propagation des ondes planes parallèles à un plan donné, et dirigés parallèlement aux droites suivant lesquelles se mesurent les vitesses propres des molécules éthérées dans ces ondes planes. On pourra aussi déterminer, 1° les directions des trois rayons polarisés produits par la subdivision d'un rayon lumineux dans lequel les vibrations des molécules auraient des directions quelconques; 2° la vitesse de la lumière dans chacun de ces trois rayons; 3° les diverses valeurs que prendrait cette vitesse, dans les rayons polarisés produits par la subdivision de plusieurs rayons lumineux qui partiraient simultanément d'un même point. Enfin l'on pourra construire la surface à trois nappes, qui, au bout du temps t, passerait par les extrémités de ces rayons, et que l'on nomme la surface de l'onde lumineuse. Quant à l'intensité de la lumière, elle sera mesurée, dans chaque rayon, par le carré de la vitesse des molécules. Cela posé, si l'élasticité du fluide éthéré reste la même en tous sens autour d'un axe quelconque parallèle à l'axe des z, on aura,

$$(1) \qquad G = H, \; L = M = 3R, \; P = Q;$$

et par conséquent les neuf coefficients dépendants de la distribution des molécules dans l'espace se réduiront à

cinq, savoir : H, I, N, Q, R. Il y a plus : deux nappes de la surface ci-dessus mentionnée pourront se réduire au système de deux ellipsoïdes de révolution circonscrits l'un à l'autre ; et, pour que cette dernière réduction ait lieu, il suffira que la condition

$$(2) \qquad (3R-Q)(N-Q)=4Q^2$$

soit remplie. Enfin l'un des deux ellipsoïdes deviendra une sphère qui aura pour diamètre l'axe de révolution de l'autre ellipsoïde, si l'on suppose

$$(3) \qquad H=I;$$

et alors la marche des deux rayons polarisés sera précisément celle qu'indique le théorème d'Huyghens, relatif aux cristaux qui offrent un seul axe optique. Or, l'exactitude de ce théorème ayant été mise hors de doute par les nombreuses expériences des physiciens les plus habiles, il résulte de notre analyse que, dans les cristaux à un axe optique, les coefficients H, I, N, Q, R, vérifient les conditions (2) et (3). D'ailleurs l'élasticité du fluide éthéré n'étant, par hypothèse, la même en tous sens qu'autour de l'axe des z, il n'est pas naturel d'admettre que l'on ait $G=H=I$, à moins que l'on ne suppose les trois coefficients G, H, I, généralement nuls. Il est donc très probable que dans l'éther ces trois coefficients s'évanouissent, et avec eux les pressions supportées par un plan quelconque dans l'état naturel. Cette hypothèse étant admise, l'ellipsoïde et la sphère ci-dessus mentionnées seront représentées par les équations

$$(4) \qquad \frac{x^2+y^2}{R}+\frac{z^2}{Q}=t^2, \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{Q}=t^2;$$

en sorte que $\sqrt{Q}$ sera le demi-diamètre de la sphère, et $\sqrt{R}$ le demi-diamètre de l'équateur dans l'ellipsoïde. Il importe d'observer que dans les cristaux doués d'un seul axe optique, ces deux demi-diamètres, ou leurs carrés Q, R, sont toujours très-peu différents l'un de l'autre, et qu'en conséquence l'ellipse génératrice de l'ellipsoïde offre une excentricité très petite. Il en résulte aussi que la condition (2) se réduit sensiblement à la suivante

$$N = 3R,$$

c'est-à-dire à une condition qui est remplie, toutes les fois que l'élasticité d'un milieu reste la même en tous sens autour d'un point quelconque. Ajoutons que l'intensité de la lumière déterminée par le calcul pour chacun des deux rayons polarisés que nous considérons ici est précisément celle que fournit l'observation. Quant au troisième rayon polarisé, le calcul montre qu'il est très-difficile de l'apercevoir, attendu que l'intensité de la lumière y demeure toujours très-petite quand elle n'est pas rigoureusement nulle. Nous indiquerons plus tard les moyens d'en constater l'existence.

Concevons à présent que, dans le fluide éthéré, l'élasticité cesse d'être la même en tous sens autour d'un axe parallèle à l'axe des z. Si l'on coupe la surface de l'onde lumineuse par les plans coordonnés, les sections faites dans deux nappes de cette surface pourront se réduire aux trois cercles et aux trois ellipses reprentées par les équations

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{R}+\dfrac{z^2}{Q}=t^2, & \dfrac{y^2+z^2}{P}=t^2, \\ \dfrac{z^2}{P}+\dfrac{x^2}{R}=t^2, & \dfrac{z^2+x^2}{Q}=t^2, \\ \dfrac{x^2}{Q}+\dfrac{y^2}{P}=t^2, & \dfrac{x^2+y^2}{R}=t^2; \end{cases}$$

et, pour que cette réduction ait lieu, il suffira que, les coefficients G, H, I étant nuls, les trois conditions

$$(6)\quad \begin{cases} (M-P)(N-P)=4P^2, (N-Q)(L-Q)=4Q^2, \\ (L-R)(M-R)=4R^2, \end{cases}$$

toutes trois semblables à la condition (2), soient vérifiées. Il y a plus, si les excentricités des trois ellipses sont assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés, les conditions (6) entraîneront la suivante

$$\begin{aligned}(M-P)(N-Q)(L-R)&=(N-P)(L-Q)(M-R)\\&=2PQR,\end{aligned}$$

et l'équation de la surface de l'onde lumineuse pourra être réduite à

$$(7)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)(Px^2+Qy^2+Rz^2) \\ -[P(Q+R)x^2+Q(R+P)y^2+R(P+Q)z^2]t^2+t^4=0. \end{cases}$$

Or, les trois cercles, les trois ellipses, et la surface du 4e degré représentées par les équations (5), (7), sont précisément celles que Fresnel a données comme propres à indiquer la marche des deux rayons polarisés, aperçus jusqu'à ce jour dans les cristaux à deux axes optiques; et l'on sait d'ailleurs que, dans ces cristaux, les excentricités des ellipses sont fort petites. Donc les conditions (6) doivent y être sensiblement vérifiées. Au reste, il est bon d'observer que, si les excentricités devenaient nulles, ou en d'autres termes, si l'on avait

$$(8)\qquad P=Q=R,$$

les conditions (6) donneraient

$$(9)\qquad L=M=N=3R,$$

et que les conditions (8), (9) sont précisément celles qui doivent être remplies pour que l'élasticité d'un milieu reste la même dans tous les sens.

Quant au troisième rayon polarisé, comme l'intensité de sa lumière est fort petite, il sera généralement très-difficile de l'apercevoir, si ce n'est dans des circonstances particulières que notre théorie nous permettra d'indiquer.

En résumant ce qu'on vient de dire, on voit que, les conditions (6) étant supposées rigoureusement remplies, les sections faites dans la surface de l'onde lumineuse par les plans coordonnés coincideront exactement avec celles que Fresnel a données. Quant à la surface même, elle sera peu différente de la surface du 4e degré que cet illustre physicien a obtenue, et par conséquent cette dernière est dans la théorie de la lumière ce qu'est le mouvement elliptique des planètes dans le système du monde.

Les excentricités des ellipses suivant lesquelles la surface de l'onde lumineuse se trouve coupée par les plans coordonnés étant généralement fort petites pour les cristaux à un seul axe ou à deux optiques, il en résulte qu'on peut déterminer avec une grande approximation, dans ces cristaux, les vitesses de propagation des ondes planes, et les plans de polarisation des rayons lumineux à l'aide de la règle que je vais indiquer.

Pour obtenir les vitesses de propagation des ondes planes parallèles à un plan donné $A\,B\,C$, et correspondantes aux deux rayons polarisés que transmet un cristal un ou à deux axes optiques, il suffit de couper l'ellipsoïde que représente l'équation.

$$\frac{x^2}{P}+\frac{y^2}{Q}+\frac{z^2}{R}=1 \tag{10}$$

par un plan diamétral parallèle au plan donné. La section ainsi obtenue sera une ellipse dont les deux axes seront numériquement égaux aux vitesses de propagation des ondes planes dans les deux rayons. De plus celui de ces deux rayons dans lequel les ondes planes se propageront avec une vitesse représentée par le grand axe de l'ellipse sera polarisé parallèlement au petit axe; et réciproquement le rayon dans lequel les ondes planes se propageront avec une vitesse représentée par le petit axe de l'ellipse sera polarisé parallèlement au grand axe. Si l'on fait coincider le plan ABC avec l'un des plans principaux de l'ellipsoïde, les deux rayons polarisés suivront la même route, et les deux vitesses de la lumière dans ces rayons seront précisément les vitesses de propagation des ondes planes. Par suite les vitesses de la lumière dans les six rayons polarisés, dont les directions coïncident avec les trois axes de l'ellipsoïde, sont deux à deux égales entre elles et à l'un des nombres $\sqrt{P}, \sqrt{Q}, \sqrt{R}$. Ajoutons que les deux rayons dont la vitesse est $\sqrt{P}$ sont polarisés parallèlement à l'axe des x, ceux dont la vitesse est $\sqrt{Q}$ parallèlement à l'axe des y, et ceux dont la vitesse est $\sqrt{R}$ parallèlement à l'axe des z. Dans le cas particulier où les quantités P, Q deviennent égales entre elles, la surface repésentée par l'équation (10), ou

$$\frac{x^2+y^2}{Q}+\frac{z^2}{R}=1, \tag{11}$$

est un ellipsoïde de révolution dont l'axe est ce qu'on appelle l'axe optique du cristal. Alors, l'un des demi-axes de la section faite par un plan diamétral quelconque est constamment égal à $\sqrt{Q}$, ainsi que la vitesse de la lumière dans l'un des deux rayons polarisés. Le rayon dont il s'a-

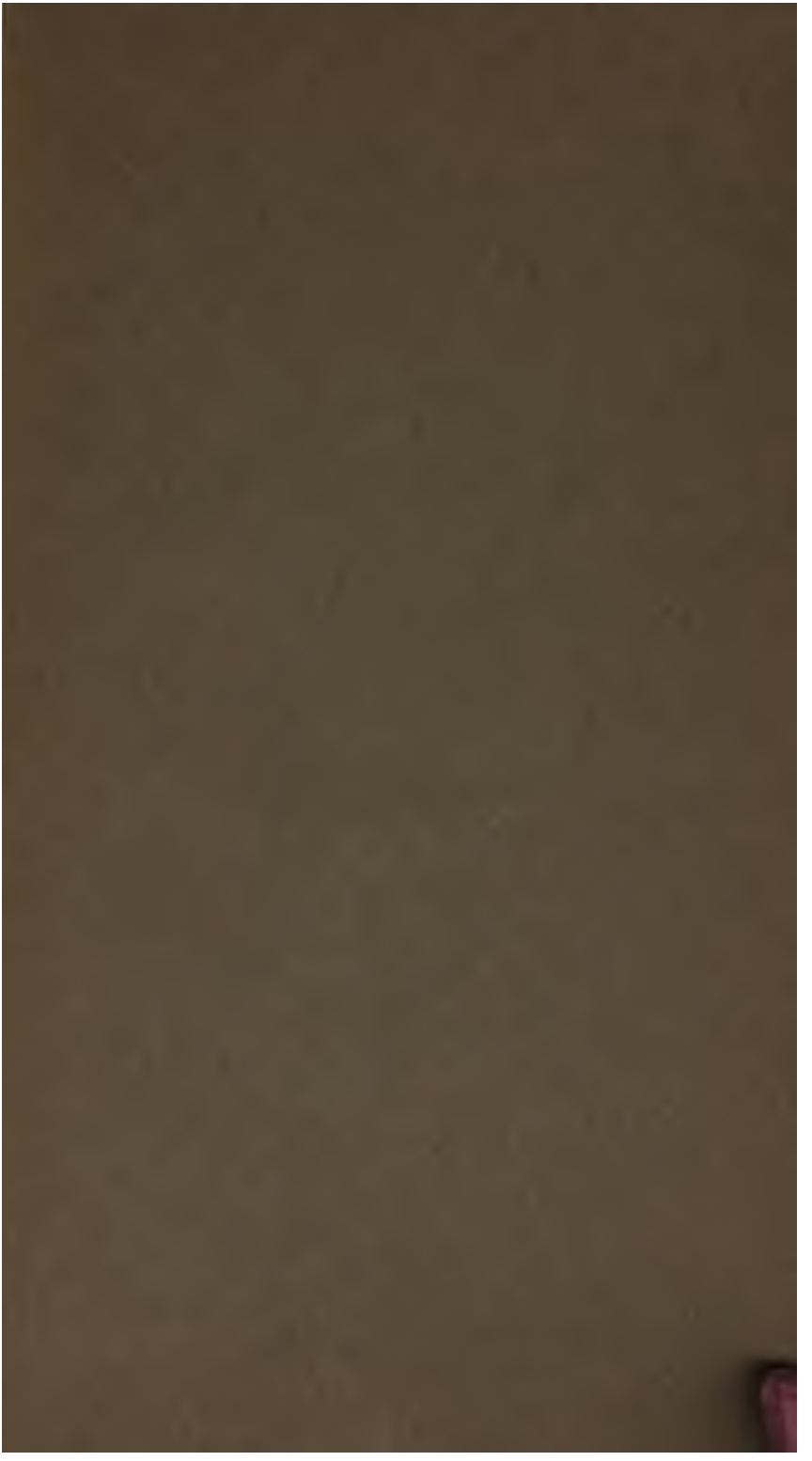
git est celui qu'on nomme rayon ordinaire, et il se trouve polarisé parallèlement à la droite, qui, dans le plan *ABC* forme le plus petit et le plus grand angle avec l'axe optique, tandis que l'autre rayon, appelé rayon extraordinaire, est polarisé parallèlement à la droite d'intersection du plan *ABC* et d'un plan perpendiculaire à l'axe optique. Alors aussi les deux rayons ordinaire et extraordinaire se superposent, quand ils sont dirigés suivant l'axe optique, et se réduisent à un rayon unique qui n'offre plus aucune trace de polarisation.

Lorsque les trois quantités P, Q, R sont inégales entre elles, l'ellipsoïde représenté par l'équation (10) peut être coupé suivant des cercles par deux plans diamétraux qui renferment tous deux l'axe moyen. Donc les deux rayons polarisés se superposent lorsque les ondes planes deviennent parallèles à l'un de ces plans. Alors, la direction commune des deux rayons est ce qu'on appelle un axe optique. Donc, pour les cristaux dans lesquels l'élasticité de l'éther n'est pas la même en tous sens autour d'un axe, il existe deux axes optiques suivant lesquels se dirigent les rayons qui n'offrent plus aucune trace de polarisation.

Toutes ces conséquences de notre analyse sont conformes à l'expérience, et même, dans des leçons données au collége royal de France, M. Ampère avait déjà remarqué que la construction de l'ellipsoïde représenté par l'équation (10) fournit le moyen de déterminer les vitesses de propagation des ondes planes et les plans de polarisation des rayons lumineux. Seulement ces plans, que l'on croyoit perpendiculaires aux directions des vitesses propres des molécules éthérées, renferment au contraire ces mêmes directions.

Nous ajouterons qu'à l'équation (10) on pourroit substituer la suivante

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=1. \qquad (12)$$

En effet, les deux sections faites par un même plan dans les deux ellipsoïdes que représentent les équations (10) et (12) ont leurs axes parallèles, et ceux de la seconde section sont respectivement égaux aux quotients que l'on obtient en divisant l'unité par les axes de la première.

IMPRIMERIE DE BÉTHUNE,
RUE PALATINE, N. 5.